Andrzej Chabraszewski, 1b

Jeśli $a + \frac{1}{a}$ jest wymierne, to $a^k + \frac{1}{a^k}$ też $k \in N)$.

Dowód jest indukcyjny i korzysta z tego,

że $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^k + \frac{1}{k}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right)$

Teraz dowód nie wprost:

Załóżmy, że $\frac{1}{\sqrt[4]{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}} + \sqrt[4]{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ jest wymierne.

Wtedy na mocy lematu $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} + 2\sqrt{2} - 7$ też jest wymierne. Ale:

$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7} + 2\sqrt{2} - \sqrt{7} = 4\sqrt{2}$, a więc

mamy sprzeczność z założeniem, co dowodzi, że ta liczba jest niewymierna.