O pewnych zgadnieniach optymalizacyjnych

Kinga Kolczyńska - Przybycień

O pewnych zgadnieniach optymalizacyjnych

Kinga Kolczyńska - Przybycień

Spis tresci

Spis tresci

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach praktycznych bardzo ważne jest znajdowanie optymalnego (czyli najlepszego z jakiegoś punktu widzenia) rozwiązania danego problemu. Dla przykładu, gdybyśmy chcieli podróżować z Poznania do Białegostoku, to szukając takiego połączenia moglibyśmy brać pod uwagę kilka aspektów. Po pierwsze moglibyśmy szukać połączenia, które jest najtańsze, lub takiego, które zajmuje najmniej czasu, albo takie, które jest najbardziej komfortowe. Każde takie połączenie, tzn. najtańsze, najszybsze, najbardziej komfortowe można nazwać optymalnym. Takim właśnie znajdowaniem elementów optymalnych zajmuje się dział matematyki zwany optymalizacją.

Wprowadzenie

Wprowadzenie

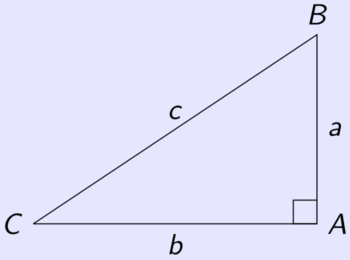
Wprowadzenie

Na dzisiejszym wykładzie przedstawionych zostanie kilka prostych, przykładowych zagadnień optymalizacyjnych, nad którymi , być może ktoś z Was już się zastanawiał. Zanim jednak przejdziemy do meritum sprawy, podam Wam kilka informacji wstępnych.

Wiadomości wstępne

Twierdzenie Pitagorasa. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem o bokach długości $a \leqslant b \leqslant c$. Wówczas $\triangle ABC$ jest trójkątem prostokątnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c^2 = b^2 + a^2$$



Wiadomości wstępne

Wzory skróconego mnożenia. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzą następujące wzory:

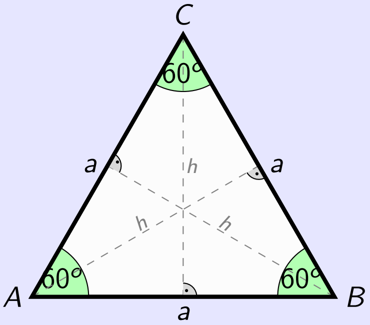
1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Nierówność między *średnią arytmetyczną* oraz *średnią geometyczną*. Dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych a, b, c zachodzą następujące nierówności :

1. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b}$
2. $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

Przy czym równość w powyższych nierównościach zachodzi tylko wtedy, gdy $a = b = c$.

Wiadomości wstępne

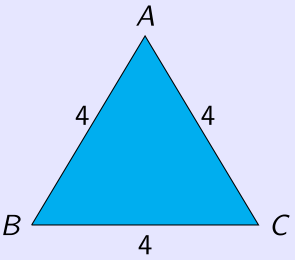


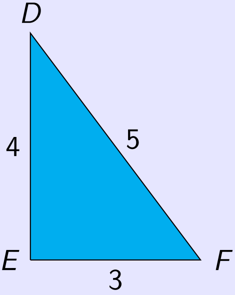
Z Twierdzenia Pitagorasa wynika, że wysokość w trójkącie równobocznym wyraż się wzorem: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wynika stąd wzór na pole trókąta równobocznego:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Rozważmy dwa trójkąty: trójkąt $\triangle ABC$ o bokach długości $4, 4, 4$ oraz trójkąt $\triangle DEF$ o bokach długości $3, 4, 5$.





Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Łatwo zauważyć, że obwód trójkąta $\triangle ABC$ jest równy $l_{\triangle ABC} = 4 + 4 + 4 = 12$ i wynosi tyle samo co obwód trójkąta $\triangle DEF$, natomiast pola tych trójkątów nie są równe mianowicie:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} > 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} = S_{\triangle DEF}.$$

Widać więc, że dwa trójkąty o równych obwodach mogą mieć różne pole, powstaje zatem następujące zagadnienie:
Spośród wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie ρ znaleźć ten, którego pole jest największe.
Zagadnienie to nosi nazwę **zagadnienia izoperymetrycznego dla trójkąta.**

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

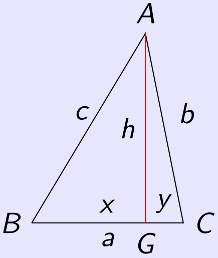
Na dzisiejszym wykładzie rozwiążemy, to zagadnienie, to znaczy wskażemy trójkąt , który przy danym obwodzie ρ ma największe pole. Rozwiązanie tego zagadnienia dokonamy w dwóch krokach.

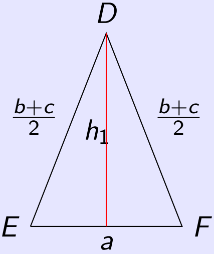
Krok 1. *Pokażemy, że jeżeli $\triangle ABC$ jest trójkątem różnobocznym o bokach długości $a < b < c$, to istnieje trójkąt równoramienny $\triangle DEF$ o takim samym obwodzie jak trójkąt $\triangle ABC$, przy czym dla ich pól zachodzi związek:*

$$S_{\triangle ABC} < S_{\triangle DEF}.$$

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Niech więc $\triangle ABC$ będzie trójkątem różnobocznym o bokach długości $a < b < c$, rozważmy trójkąt równoramienny $\triangle DEF$ o bokach długości a, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ jak na rysunku poniżej. Pokażemy, że pole trójkąta $\triangle ABC$ jest mniejsze niż pole trójkąta $\triangle DEF$.





Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Ponieważ trójkąty $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ mają wspólne podstawy równej długości więc aby udowodnić, że pole trójkąta $\triangle ABC$ jest mniejsze niż pole trójkąta $\triangle DEF$ wystarczy pokazać, że $h < h_1$.
Niech G będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A i niech $|BG| = x, |GC| = y$.
Zauważmy, że

$$x^2y^2 = (c^2 - h^2)(b^2 - h^2) = c^2b^2 - c^2h^2 - b^2h^2 + h^4 =$$

$$= c^2b^2 - (c^2 + b^2)h^2 - h^4 < c^2b^2 - 2cbh^2 + h^4 = (cb - h^2)^2.$$

Zatem

$$bc - xy > h^2.$$

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Mamy dalej

$$h_1^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2+2bc+c^2}{4} - \frac{x^2+2xy+y^2}{4} =$$

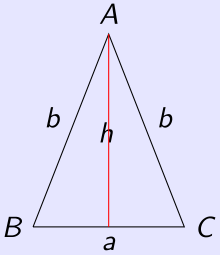
$$= \frac{(b^2-y^2)+2(bc-xy)+(c^2-x^2)}{4} = \frac{h^2+2(bc-xy)+h^2}{4} >$$

$$> \frac{h^2+2h^2+h^2}{4} = h^2.$$

Zatem $h_1 > h$ co kończy dowód pierwszego kroku.

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Krok 2 *Pokażemy, że spośród wszystkich trójkątów równoramiennych o obwodzie długości ρ najwieksze pole ma trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{\rho}{3}$.*
Niech więc $\triangle ABC$ będzie trójkątem równoramiennym o obwodzie ρ.



Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Mamy $a+2b=\rho$, więc $b=\frac{\rho-a}{2}$. Zatem z Twierdzenia Pitagorasa mamy

$$h^2=b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{\rho-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\rho^2-2\rho a+a^2-a^2}{4}=\frac{\rho(\rho-2a)}{4}.$$

Skąd

$$h=\frac{\sqrt{\rho(\rho-a)}}{2}.$$

Dalej otrzymujemy

$$S_{\triangle ABC}=\frac{ah}{2}=\frac{a\sqrt{\rho}\sqrt{\rho-2a}}{4}=\frac{\sqrt{\rho}}{4}\cdot\sqrt{a\cdot a\cdot(\rho-2a)}$$

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

$$= \frac{\sqrt{\rho}}{4} \cdot \sqrt{\left(\sqrt[3]{a \cdot a \cdot (\rho - 2a)}\right)^3} \leqslant \frac{\sqrt{\rho}}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{a + a + (\rho - 2a)}{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{\rho}}{4} \cdot \sqrt{\frac{\rho^3}{27}} = \frac{\rho^2\sqrt{3}}{36}.$$

Pokazaliśmy więc, że pole dowolnego trójkąta równoramiennego o obwodzie ρ nie przekracza liczby $\frac{\rho^2\sqrt{3}}{36}$, przy czym jest ono równe tej liczbie tylko wtedy, gdy zajdzie równość w nierówności pomiędzy średnimi, z której skorzystaliśmy w powyższym oszacowaniu, to jest tylko wtedy, gdy $a = \rho - 2a$ czyli

$$a = b = \frac{\rho}{3},$$

co kończy dowód kroku drugiego.

Zagadnienie izoperymetryczne dla trójkąta

Z kroków 1 i 2 wynika następująca własność:

Wśród wszystkich trójkątów o danym obwodzie ρ największe pole ma trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{\rho}{3}$ i jego pole wynosi $\frac{\rho^2\sqrt{3}}{36}$.

Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta

Podobnie jak dla trójkąta łatwo zauważyć, że dwa czworokąty o równych obwodach, mogą mieć rożne pola, powstaje wiięc naturalny problem:
Spośród wszystkich czworokątów o ustalonym obwodzie ρ znaleźć ten, którego pole jest największe.
Zagadnienie to nosi nazwę **zagadnienia izoperymetrycznego dla czworokątów.**

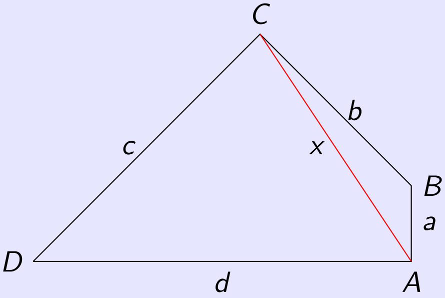
Podobnie jak dla trójkąta rozwiązania tego zagadnienia dokonamy w dwóch krokach.

Krok 1. *Pokażemy, że jeżeli* $\square ABCD$ *jest czworokątem o bokach długości* $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$*, to istnieje romb* $\square EFGH$ *o takim samym obwodzie jak czworokąt* $\square ABCD$*, przy czym dla ich pól zachodzi związek:*

$$S_{\square ABCD} \leqslant S_{\square EFGH}.$$

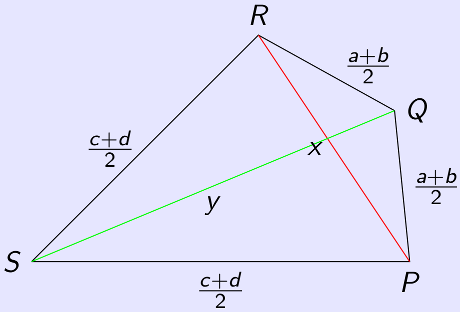
Przejdźmy teraz do dowodu tego faktu. Jeżeli $\square ABCD$ jest rombem to nie ma czego dowodzić. Możemy więc założyć, że $a < b$.

Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta



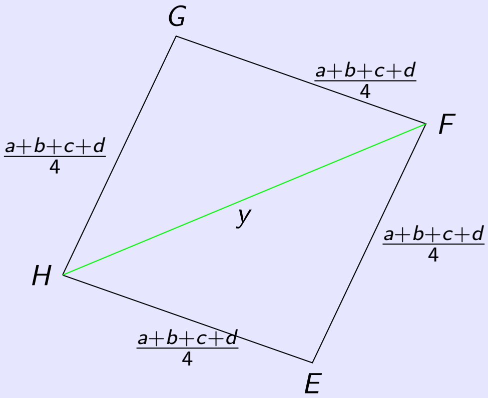
Z kroku 1 rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego dla trójkąta wynika, że pole czworokąta $\square ABCD$ jest mniejsze od pola czworokąta $\square PQRS$ przedstawionego poniżej.

Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta



Z kroku 1 rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego dla trójkąta wynika, że pole czworokąta $\square PQRS$ jest niewiększe od pola rombu $\square EFGH$ przedstawionego poniżej.

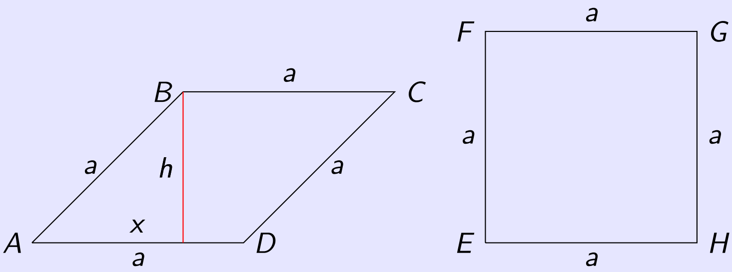
Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta



co kończy dowód kroku 1.

Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta

Krok 2. *Pokażemy, że jeżeli $\square ABCD$ jest rombem o boku długości a to kwadrat $\square EFGH$ o boku długości a ma pole większe lub równe od pola rombu $\square ABCD$*



Z Twierdzenia Pitagorasa mamy

$$h = \sqrt{a^2 - x^2} \leqslant \sqrt{a^2 - 0^2} = a.$$

Zagadnienie izoperymetryczne dla czworokąta

Zatem

$$S_{\square ABCD} = a \cdot h \leqslant a \cdot a = a^2 = S_{\square EFGH}$$

co kończy dowód kroku 2.

Z kroków 1 i 2 wynika następująca własność:

Wśród wszystkich czworokątów wypukłych o danym obwodzie ρ największe pole ma kwadrat o boku długości $\frac{\rho}{4}$ i jego pole wynosi $\frac{\rho^2}{16}$.

Dziękuję za uwagę

Kinga Kolczyńska - Przybycień